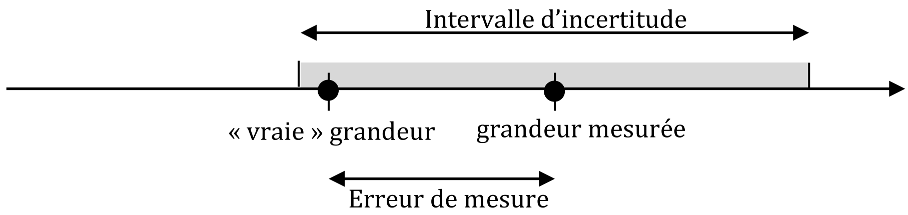
Calcul d'incertitude et chiffres significatifs

1. Introduction, motivation. Toute mesure expérimentale comporte une incertitude. Celle-ci indique la marge de confiance que l'on peut accorder à la valeur obtenue. L'incertitude est l'erreur de mesure maximale que l'on pense faire lors d'une mesure. L'erreur de mesure est la différence entre la valeur vraie de la grandeur et sa valeur mesurée. Elle est donc impossible à déterminer. Un résultat est d'autant plus précis que l'erreur de mesure est faible.



Deux situations nécessitent typiquement la connaissance de l'intervalle d'incertitude sur une grandeur mesurée :

- Lorsqu'il faut comparer deux valeurs mesurées (par deux personnes différentes ou par deux processus de mesure différents) pour savoir si elles sont compatibles ;
- Lorsqu'il faut comparer une valeur mesurée avec une valeur théorique pour vérifier la validité d'une théorie.

Un résultat donné sans incertitude n'a aucun sens : il est inutilisable !

2. Incertitudes sur les valeurs mesurées. L'intervalle d'incertitude peut être :

- Une **incertitude absolue (notation Δ(G))**, exprimée dans la même unité que la grandeur G elle-même et qui indique la marge de confiance que l'on peut accorder au résultat.

  Exemple : 3,5 V ± 0,2 V ou (3,5 ± 0,2) V

- Une **incertitude relative (notation i(G))**, qui est l'incertitude absolue exprimée en % de la valeur mesurée G.

  Exemple : 25 cm ± 2 cm devient 25 cm à 8 %, car $i(G) = \frac{\Delta G}{G} = \frac{2\ cm}{25\ cm}$ et i × 100 = 8 %

  L'incertitude relative caractérise la précision d'une mesure : la mesure est d'autant plus précise que son incertitude relative est faible.

- Une **incertitude en digits.** Le nombre de digits spécifié comme incertitude est le nombre d'unités sur les derniers chiffres affichés par l'instrument. Ci-dessous deux exemples de mesure de 5 V, avec une incertitude de 12 digits :

5.0000	**5.000**
U = 5,0000 V ± 0,0012 V	U = 5,000 V ± 0,012 V

Selon les expériences et le type de mesures ou d'appareils de mesure utilisés, on considérera soit l'incertitude absolue, l'incertitude en % de la valeur mesurée, ou encore l'incertitude en digits. Il vous faudra déterminer (avec l'aide du prof au besoin) l'incertitude associée à chaque mesure prise en laboratoire.

3. Règles de calcul d'incertitude pour des combinaisons de valeurs mesurées

Règle 1 : l'incertitude absolue Δ sur une **somme** ou sur une **différence** de valeurs mesurées est égale à la somme des incertitudes absolues de chacun des termes.
Si C = A + B ou si C = A – B, alors $\boxed{\Delta C = \Delta A + \Delta B}$. ΔC a les unités de A et B.

Règle 2 : l'incertitude relative i sur un **produit** ou un **quotient** de valeurs mesurées est égale à la somme des incertitudes relatives sur chacun des facteurs.
Si C = A·B ou si C = A/B, alors $\boxed{i(C) = i(A) + i(B)}$. i(C) est sans unités.

Règle 3 : l'incertitude relative sur une puissance ou une racine d'une valeur mesurée est égale au produit de l'exposant par l'incertitude relative de la valeur mesurée.
Si $C = A^n$, alors $\boxed{i(C) = n \cdot i(A)}$. i(C) est sans unités.

Remarques : il n'y a pas d'incertitude sur les constantes.
Pour les autres opérations mathématiques, il existe d'autres règles qui vous seront données par le prof au cas par cas.

4. Chiffres significatifs

Un chiffre significatif est un chiffre dont l'exactitude est relativement certaine. Les chiffres significatifs sont ceux qui restent après suppression des zéros aux deux extrémités du nombre.

- 15,62 possède 4 chiffres significatifs
- 3400 possède 2, 3 ou 4 chiffres significatifs, sans plus de précision sur les données
- 0,000023 possède deux chiffres significatifs

5. Opérations avec les chiffres significatifs

- **Addition et soustraction :** on arrondit le résultat au même nombre de décimales que l'opérande qui en a le moins.
  5,631 + 14,1 + 7,3286 = 27,0596 = 27,1

  Multiplication et division : on arrondit la réponse au même nombre de chiffres significatifs que l'opérande qui en a le moins.
  $\frac{473{,}21 \times 72{,}716}{2728 \times 128} = 9{,}85 \times 10^{-2}$, car 128 a trois chiffres significatifs.

  Dans ce dernier exemple, on notera que la notation scientifique est particulièrement adaptée à l'écriture d'un résultat avec ses chiffres significatifs.

  Lorsque vous avez plusieurs opérations mathématiques à faire pour déterminer un résultat, effectuez les calculs sans arrondir. A la fin, la réponse finale sera ajustée avec le bon nombre de chiffres significatifs.

6. Arrondis et formats d'affichage

Une erreur fréquemment commise consiste à indiquer des intervalles d'incertitude avec une précision beaucoup trop grande. Par exemple, ma voiture consomme entre 7,12434 et 8,02367 litres au 100 km. En matière d'arrondis, les règles suivantes s'appliquent :

a). les incertitudes absolues doivent être arrondies vers le haut de manière à comporter
-généralement un et au maximum deux chiffres significatifs ;
-au maximum le même nombre de décimales que celles qui sont lisibles sur l'instrument de mesure

b). après détermination de l'incertitude absolue, la valeur de la grandeur considérée doit également être arrondie, mais vers la valeur la plus proche, et de manière à ne pas comporter plus de décimales que l'incertitude.

c). lorsque l'on souhaite donner l'incertitude relative sur un résultat, celle-ci doit être calculée à partir des valeurs arrondies, puis être elle-même arrondie vers le haut à 2 chiffres significatifs au maximum.

Exemple de notation correcte :
3,07 ± 0,12   3,07 ± 0,03   3,70 ± 0,34   5,4 ± 2,3   9,6 ± 1,2

Exemple de résultats incorrects et correction :

Règle a) : 3,07±0,012 → **3,07±0,01**   961 ± 121 → $\mathbf{9{,}6\times10^2 \pm 1{,}2\times10^2}$

Règle b) : 3,071±0,12 → **3,07±0,12**   961,2±120 → $\mathbf{9{,}6\times10^2 \pm 1{,}2\times10^2}$

7. Incertitude sur une série de mesures d'une même grandeur

Exemple : on mesure la largeur d'un bureau en quatre endroits différents et on obtient :

x_1=57,3 cm ± 0,4 cm ; x_1=58,1 cm ± 0,4 cm ; x_1=56,7 cm ± 0,4 cm ; x_1=56,9 cm ± 0,4 cm

La valeur est donnée par $x = \frac{x_{max}+x_{min}}{2}$ et l'incertitude par $\Delta x = \frac{x_{max}-x_{min}}{2}$. Cela donne :

$x \pm \Delta x$ = 57,4 cm ± 0,7 cm. D'autres approches statistiques sont ici possibles.

Source : Laboratoires de réseaux électriques, EPFL, Lausanne (adapté)

8. Exemple de calcul complet avec commentaires

On mesure le courant I à travers une résistance R et l'on souhaite calculer la chute de tension U aux bornes de cette dernière en utilisant la loi d'Ohm.

- L'ampèremètre donne la valeur I = 0,455 A. L'incertitude est de 3 digits ou 1% de la valeur mesurée. En choisissant les digits, on trouve ΔI = 0,003 A ; avec le 1% de la valeur mesurée, on obtient ΔI = 0,005 A en arrondissant. Comme ce dernier résultat est plus grand que le premier, on choisira cette incertitude (on prendra toujours la plus élevée), par conséquent, I = (0,455 ± 0,005) A
- La valeur de la résistance est donnée par le fabriquant : R = 4700 Ω à 1%. Le 1% de 4700 donne 47. Evidemment on ne va pas considérer que la valeur de R a quatre chiffres significatifs ! C'est deux ou trois, mais le 1% d'incertitude relative nous permet d'affirmer que c'est trois. Par conséquent, on arrondi l'incertitude à ΔR = 50 Ω, avec un seul chiffre significatif et on écrira R = (4700 ± 50) Ω. Comme le dernier « 0 » n'est pas significatif, on préférera utiliser la notation scientifique ici, c'est à dire que l'on écrira R = ($4{,}70\times10^3 \pm 0{,}05\times10^3$) Ω.
- Enfin, il n'y a plus qu'à multiplier ces deux nombres entre eux, selon la loi d'Ohm : U = RI = $4{,}70\times10^3 \times0{,}455 = 2{,}14 \times10^3$ V, le résultat est arrondi à 3 chiffres significatifs, car les deux opérandes ont ici chacun trois chiffres significatifs. Pour l'incertitude absolue, il faut d'abord additionner les incertitudes relatives : $\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta R}{R} = 0{,}01 + 0{,}01 = 0{,}02$, puis calculer $\Delta U = 2{,}1385 \times 10^3 \times 0{,}02 = 0{,}04 \times 10^3$ V . On remarquera qu'on a simplement repris les incertitudes relatives données par les caractéristiques de l'ampèremètre et par le fabriquant de résistances. Pour le calcul de ΔU, c'est la valeur non arrondie de U qui est utilisée ; de plus, ΔU est arrondi à la bonne décimale de façon à ce que son expression soit compatible avec le format de U (nombre identique de décimales). Il convient pour finir de surévaluer ΔU car le résultat final donne une incertitude relative (0,04/2,14) un peu inférieure à 2%, ce qui ne serait pas tout à fait correct. On écrira donc finalement le résultat sous la forme U = $2{,}14 \times 10^3$ V ± $0{,}05 \times 10^3$ V.

9. Quelques valeurs physiques de référence et leur incertitude

Masse de l'électron, m_e = ($9{,}10938291\times10^{-31} \pm 0{,}00000040\times10^{-31}$) kg
Charge élémentaire e = ($1{,}602176565\times10^{-19} \pm 0{,}000000035\times10^{-19}$) C

Exercices

1). Indiquer le nombre de chiffres significatifs dans les exemples suivants :

a) 454 kg	e) 0,0353 m	i) 1,118·10^{-3} g	*Réponses :*
b) 2,2 N	f) 1,008 kg	j) 1030 kg/m^2	*a) 3, b) 2, c) 4, d) 4, e) 3, f) 4, g) 2*
c) 2,205 N	g) 14 ml	k) 125'000 kg	*h) 2, i) 4, j) 3 ou 4, k) 3, 4, 5 ou 6*
d) 0,3937 cm	h) 9,3·10^7 km	l) 100'000 à 1%	*l) 4 (si 2 ch. sign. sur Δ)*

2). Additionner :

a)	b)	c)	d)	
703 kg	18,425 cm	0,0035 l	4,0 N	*Réponses : a) 711 kg, b) 30,6 cm, c) 0,326 l*
7 kg	7,21 cm	0,097 l	0,632 N	*d). 4,8 N*
0,66 kg	5,0 cm	0,225 l	0,148 N	

3). Soustraire :

a)	b)	c)	
7,26 kg	562,4 cm	34 kg	*Réponses : a) 7,1 kg, b) 545,6 m, c) 34 kg*
0,2 kg	16,8 cm	0,2 kg	

4). Multiplier (résultats en notation scientifique) :

a) 2,21·0,3	d) 107,88·0,61	*Réponses : a) 7×10^{-1} b) 6,1 c) 8,31 d) $6,6\times10^{1}$ e) $1,0\cdot10^{3}$ f) $6,2\cdot10^{2}$*
b) 72,4·0,084	e) 12,4·84	
c) 2,02·4,113	f) 72,4·8,6	

5). Diviser (résultats en notation scientifique) :

a) 97,52÷2,54 b) 14,28÷0,714 c) 0,032÷0,004 d) 9,8÷9,3

Réponses : a) $3,84\times10^{1}$ b) $2,00\times10^{1}$ c) 8 d) 1,1

6). Calculer D = L_1-L_2 avec ses incertitudes absolues : $L_1 = 51.2 \pm 0.5$ m et $L_2 = 3.5 \pm 0.1$ m.

7). Calculer le périmètre et la surface d'un rectangle de côtés a et b, ainsi que leurs incertitudes absolues. Exprimer les résultats avec une écriture correcte : a = 3.23 ± 0.02 m et b = 1.91 ± 0.02 m.

8). Calculer la masse volumique ρ d'un cube de côté c. Exprimer les résultats avec une écriture correcte.

$\rho = \frac{m}{V}$ et $V = c^3$ donc $\rho = \frac{m}{c^3}$ m = 1740 ± 10 kg (4 chiffres significatifs) et c = 1.30 ± 0.01 m.

9). Déterminer le volume et la surface d'une sphère de 20.0 mm de rayon (avec incertitudes absolues).
NB : Δr = 0.1 mm

10). Déterminer l'accélération centripète et ses incertitudes absolues, sachant que $a_c = \frac{v^2}{r}$
v = 15.00 ± 0.05 m/s et r = 2.34 ± 0.01 m.

Corrigé des exercices 6 à 10 :

6). On applique la **règle 1** concernant la soustraction/addition des incertitudes :

$D = L_1 - L_2 = 51.2 - 3.5 = 47.7$ m

$\Delta D = \Delta L_1 + \Delta L_2 = 0.5 + 0.1 = 0.6$ m (attention : on additionne les incertitudes absolues !)

$\boxed{D = (47.7 \pm 0.6)\text{ m}}$

7). On applique la **règle 1** concernant la soustraction/addition des incertitudes :

Périmètre : P = 2(a + b) = 2(3.23 + 1.91) = 10.28 m (les deux opérandes ont deux décimales, donc le résultat de l'addition aussi).

$\Delta P = 2(\Delta a + \Delta b) = 2(3.23 + 1.91) = 0.08$ m

$\boxed{P = (10.28 \pm 0.08)\text{ m}}$

Surface : $S = a \cdot b = 3.23 \cdot 1.91 = 6.1693\text{ m}^2 \to 6.17\text{ m}^2$. Ici les deux opérandes ont 3 chiffres significatifs chacun, donc le résultat est arrondi à 3 chiffres significatifs. C'est un produit, il faut d'abord calculer l'incertitude relative avec la **règle 2** :

$i(S) = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} = \frac{0.02}{3.23} + \frac{0.02}{1.91} \to \Delta S = S \cdot i(S) = 6.1693 \cdot i(S) = 0.1028\text{ m}^2 \to 0.10\text{ m}^2$. Le calcul de ΔS se fait avec les valeurs non arrondies de S et i(S), puis ΔS est arrondie à 2 décimales, comme S, soit avec 2 chiffres significatifs (le 1 et le 0).

$\boxed{S = (6.17 \pm 0.10)\text{ m}^2}$

8). $\rho = \frac{m}{c^3} = \frac{1740}{1.30^3} = 791.989\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \to 792\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Ici le dénominateur a 3 chiffres significatifs chacun, donc le résultat est arrondi à 3 chiffres significatifs. C'est un quotient et il faut donc calculer d'abord l'incertitude relative avec la **règle 2** :

$i(\rho) = \frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta c}{c} = \frac{10}{1740} + \frac{0.01}{1.30} \to \Delta\rho = \rho \cdot i(\rho) = 791.989 \cdot i(\rho) = 22.8\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \to 23\text{ kg/ m}^3$. Le calcul de $\Delta\rho$ se fait avec les valeurs non arrondies de ρ et i(ρ), puis Δρ est arrondie à l'unité, comme ρ, soit avec 2 chiffres significatifs (le 2 et le 3).

$\boxed{\rho = (792 \pm 23)\text{ kg/m}^3}$

9). Volume : $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(20.0)^3 = 33510.32\text{ mm}^3 \to 33500\text{ mm}^3$. Le résultat est arrondi à 3 chiffres significatifs (les zéros ne sont pas significatifs !). Afin d'obtenir l'incertitude absolue sur le volume, il faut déterminer l'incertitude relative sur le volume. On connaît l'incertitude absolue sur le rayon : 0.1 mm. Il n'y a pas d'incertitudes sur les constantes. Par conséquent :

$i(V) = 3\frac{\Delta r}{r} = 3\frac{0.1}{20.0} \to \Delta V = V \cdot i(V) = 33510.32 \cdot i(V) = 502.6\text{ mm}^3 \to 500\text{ mm}^3$. Le calcul de ΔV se fait avec les valeurs non arrondies de V et i(V), puis ΔV est arrondi, comme V, avec le chiffre des centaines comme seul chiffre significatif.

$\boxed{V = (3{,}35\times10^4 \pm 0{,}05\times10^4)\text{ mm}^3}$

Surface : $S = 4\pi r^2 = 4\pi(20.0)^2 = 5026.55\text{ mm}^2 \to 5030\text{ mm}^2$

$$i(S) = 2\frac{\Delta r}{r} = 2\frac{0.1}{20.0} \to \Delta S = S \cdot i(S) = 50.26\text{ mm}^2 \to 50\text{ mm}^2$$

$\boxed{S = (5{,}03\times10^3 \pm 0{,}05\times10^3)\text{ mm}^2}$

NB : afin d'éviter d'écrire des zéros qui ne sont pas significatifs, on utilise de préférence la notation scientifique pour écrire tous ces résultats.

10). $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{15.00^2}{2.34} = 96.15\text{ m/s}^2$

$$i(a) = 2\frac{\Delta v}{v} + \frac{\Delta r}{r} = 2\frac{0.05}{15.00} + \frac{0.01}{2.34} \to \Delta a = a \cdot i(a) = 96.15 \cdot i(a) = 1.05\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \to 1.1\text{ m/s}^2$$

$\boxed{a = (96.2 \pm 1.1)\text{ m/s}^2}$